Métodos Numéricos

Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Renato S. Silva, Regina C. Almeida

Sistemas de Equações Lineares

Os sistemas lineares de equações (SELAS) aparecem em muitos - quase todos - problemas de modelagem computacional em engenharia e ciências!

- O que é um sistema de equações lineares?
- Resolução de várias equações “lineares” simultâneamente

Exemplo

3 equações e 3 incógnitas: x_1, x_2 e x_3

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

Definindo:

$linhas \quad (i)$ $\Longleftrightarrow$ equações

$colunas \quad (j)$ $\Longleftrightarrow$ coeficientes que multiplicam uma incógnita específica em cada linha

$$\begin{array}{l|ccccccc} ^{\text{linha}}/_{\text{coluna}} & j=1 & & j=2 & & j=3 & & \\ & & & & & & & \\ i=1 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ i=2 & x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 2 \\ i=3 & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

Definições

Coeficientes a_{ij}:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & 2 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & 2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & -1 \end{array} \quad \text{onde} \quad \begin{array}{lll} a_{11} = 2 & a_{12} = 4 & a_{13} = 4 \\ a_{21} = 1 & a_{22} = 5 & a_{23} = 6 \\ a_{31} = 1 & a_{32} = 3 & a_{33} = 1 \end{array}$$

- não dependem de x_i $\Rightarrow$ sistema linear de equações

Definindo b_i :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \quad \text{onde} \quad \begin{array}{l} b_1 = 2 \\ b_2 = 2 \\ b_3 = -1 \end{array}$$

Notação Matrix $\times$Vetor

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{ou} \quad A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \quad \text{ou} \quad A\underline{x} = \underline{b} \quad \text{ou} \quad \ldots$$

onde

vetor de incógnitas: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; vetor do lado direito: $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

e matriz de coeficientes: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

SELAS

Sistema com n equações e n incógnitas:

vetor de incógnitas: vetor do lado direito: matriz de coeficientes:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

SELAS

Reescrevendo o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

SELAS

Até aqui A é uma matriz com n linhas e n colunas (**matriz quadrada**).

- Se $a_{ij} \in \Re \Rightarrow A \in \Re^{n \times n}$
- Se $a_{ij} \in C \Rightarrow A \in C^{n \times n}$

Se A é uma matriz com n linhas e m colunas (**matriz retangular**).

SELAS

- Três situações podem ocorrer na resolução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:
  - existe uma única solução;
  - existem infinitas soluções;
  - não existe solução.

SELAS

Exemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2x_1 + 0x_2 = 1 \\ 0x_1 + 4x_2 = 8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 1/2 \\ x_2 = 2 \end{array}$$

A é não-singular e existe um único vetor solução $\mathbf{x}$ dado por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

SELAS

Exemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2x_1 + 0x_2 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 1/2 \\ x_2 = \alpha \end{array}$$

A é singular e existem infinitos vetores-solução $\mathbf{x}$ dados por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

SELAS

Exemplo 3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{array}{c} 2x_1 + 0x_2 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 = 1 \end{array} \Rightarrow ?$$

Não existe solução $\mathbf{x}$ pois a segunda equação não pode ser satisfeita!

SELAS Triangulares

Exemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- uma equação pode ser trivialmente resolvida: a última $\rightarrow x_3 = 2$
- agora que x_3 é conhecida, podemos resolver a segunda equação:

$$5x_2 - 2x_3 = 1 \Rightarrow 5x_2 - 2 \times 2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1.$$

- finalmente, x_1 pode ser determinado de modo análogo:

$$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \Rightarrow 2x_1 + 4 \times 1 + 4 \times 2 = 2 \Rightarrow x_2 = -5.$$

SELAS Triangulares

Princípio básico: retrossubstituição (**back-substitution**)

- precisamos que $a_{ii} \neq 0$ (denominados pivots)
- o mesmo acontece quando A é triangular superior: substituição

Método de Eliminação de Gauss

Objetivo: desenvolver um procedimento automático, um algorítmo, para a obtenção da solução do conjunto de equações.

Princípio do Método: Como os sistemas triangulares são fáceis de resolver, transformaremos o sistema linear em um outro triangular equivalente.

Exemplo 1

Considere o sistema 1

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 1x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & -6 \end{array}\right.$$

que equivale ao sistema 2

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 3x_2 & + & 1x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & -6 \end{array}\right.$$

- troca entre a primeira e segunda linhas
- vetor solução não se altera

Exemplo 1

Matrizes e vetores associados são diferentes

- para o sistema 1 tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

- e para o sistema 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2

Seja o sistema 1

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 1x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & -6 \end{array}\right.$$

Substituindo a segunda equação pela soma da primeira equação com a segunda equação obtém-se o seguinte sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & -6 \end{array}\right. .$$

Exemplo 2

Eles são equivalentes pois somando a primeira equação que é satisfeita $(2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2)$ com a segunda $(x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 1)$ que também é satisfeita obtém-se uma outra em substituição, que também é verificada automaticamente, isto é

$$\begin{array}{rr} & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ + & x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 1 \\ \hline & 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 3 \end{array}.$$

O sistema modificado passa a ser

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix},$$

com nenhum efeito sobre a solução.

Exemplo 3

Agora, se antes de somarmos as duas equações, a segunda equação for multiplicada por -2, isto é,

$$\begin{array}{rr} & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ + & -2 \times (x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 1) \\ \hline & 0x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{array},$$

obtém-se o seguinte sistema equivalente

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Operações Matriciais Elementares

Operações elementares não alteram a solução do sistema.

- permutações de linhas / colunas
- combinações lineares de linhas / colunas

Método de Gauss: transformar o sistema original em um sistema triangular através de operações elementares.

Exemplo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 1x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & -6 \end{array}\right.$$

será denotado por

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & -6 \end{array}\right]$$

Exemplo

PASSO 1: substituir a $linha\ 2$ por $linha\ 2 - \frac{1}{2} \times linha\ 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & -6 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & -6 \end{array}\right]$$

isto é equivalente a

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M} \times \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & -6 \end{array}\right]}_{A|b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & -6 \end{array}\right]$$

Exemplo

A matriz que pré-multiplica o sistema, M, é

$$M = I - ve_1^t \quad \text{com} \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Assim, para transformar

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & -6 \end{array}\right] \quad \text{em} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \times & \times & \times & \times \\ {\color{red}0} & \times & \times & \times \\ {\color{red}0} & \times & \times & \times \end{array}\right]$$

fazemos ...

Exemplo

PASSO 1:

$$linha\ 2 := linha\ 2 - (1/2) \times linha\ 1 \qquad\qquad linha\ 3 := linha\ 3 - (1/2) \times linha\ 1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & -6 \end{array}\right] \qquad\qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ \color{red}{0} & 1 & -1 & 0 \\ \color{red}{0} & 3 & 4 & -7 \end{array}\right]$$

equivalente a

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{M_1} \times \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & -6 \end{array}\right]}_{A|b} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \end{array}\right]}_{A_1|b_1}$$

Exemplo

$$[A, b] \to [M_1 A, M_1 b] \quad \text{onde} \quad M_1 = I - v^{(1)} e_1^t$$

$$\text{com} \quad v^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

O novo sistema é $[M_1 A, M_1 b]$ ou $A_1 \mathbf{x} = \mathbf{b}_1$

Para transformar

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \end{array}\right] \quad \text{em} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{array}\right]$$

fazemos ...

Exemplo

PASSO 2:

$$linha\ 3 := linha\ 3 - (3) \times linha\ 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ {\color{blue}0} & 1 & -1 & 0 \\ {\color{blue}0} & {\color{red}0} & 7 & -7 \end{array}\right|$$

equivalente a

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right| \times \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right|$$

$[A_1, b_1] \rightarrow [{\color{red}M_2 A_1}, {\color{red}M_2 b_1}]$ onde $M_2 = I - v^{(2)} e_2^t$ com $v^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Exemplo

PASSO 3: O sistema já é triangular

▷▷ retrossubstituição

- Eliminação de Gauss é equivalente a $n-1$ transformações gaussianas sucessivas, isto é, multiplicações com as matrizes da forma $M_k = I - v^{(k)} e_k^t$, onde as primeiras k componentes de $v^{(k)}$ são nulas.

Fatoração LU

Só considerando o lado direito do sistema:

$$\begin{aligned} A &\equiv& A_0 \to M_1 A_0 = A_1 \to M_2 A_1 = A_2 \to M_3 A_2 = A_3 \quad \cdots \\ \ldots &\to& M_{n-1} A_{n-2} = A_{n-1} \equiv U \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ última $A_{n-1} \equiv U$ é uma matriz triangular superior

Em cada passo obtém-se: $A_k = M_{k+1}^{-1} A_{k+1}$. Assim, com $A \equiv A_0$ obtém-se

$$\begin{aligned} A_0 &= M_1^{-1} A_1 \\ &= M_1^{-1} M_2^{-1} A_2 \\ &= M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} A_3 \\ &= \ldots \\ &= \underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \ldots M_{n-1}^{-1}}_{L} \underbrace{A_{n-1}}_{U} \end{aligned}$$

Fatoração LU

Decomposição LU: $A = LU$, com

$$L = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \dots M_{n-1}^{-1}$$

- note que $M_k^{-1} = \left(I - v^{(k)} e_k^t\right)^{-1} = \left(I + v^{(k)} e_k^t\right)$
- considerando somente as primeiras duas matrizes

$$L_2 = M_1^{-1} M_2^{-1} = \left(I + v^{(1)} e_1^t\right)\left(I + v^{(2)} e_2^t\right) = I + v^{(1)} e_1^t + v^{(2)} e_2^t$$

- genericamente

$$\begin{aligned} L_k &= M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_k^{-1} = I + v^{(1)} e_1^t + v^{(2)} e_2^t + \dots v^{(k)} e_k^t \\ &\hookrightarrow O\ fator\ L\ é\ uma\ matriz\ triangular\ inferior\ com\ 1\ na\ diagonal \end{aligned}$$

Uma dificuldade ...

Considere novamente a eliminação de Gauss para o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & -5 \end{array}\right].$$

$linha\ 2 := linha\ 2 - (1/2) \times linha\ 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & -5 \end{array}\right]$$

$linha\ 3 := linha\ 3 - (1/2) \times linha\ 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & {\color{red}0} & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \end{array}\right]$$

Uma dificuldade ...

$\triangleright\triangleright$ termo a_{22} é zero!

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \end{array}\right|$$

Solução: trocar (permutar) linhas 2 e 3:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right|$$

Caso mais geral

$$\begin{array}{r} \\ \\ linha\ k \rightarrow \\ \\ linha\ l \rightarrow \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times & \ldots & \times \\
0 & \times & \times & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \times & \ldots & \times \\
0 & 0 & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \times & \times & \ldots & \times \\
0 & 0 & & & & \vdots
\end{bmatrix}$$

▷▷ pivoteamento parcial: permutar $linha\ k$ com $linha\ l$ de modo que

$$|a_{lk}| = \max_{i=k,\ldots,n} |a_{ik}|$$

▷▷ algoritmo mais estável!

Sistemas Tridiagonais

Suponha que é tridiagonal:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

- muitas operações podem ser evitadas
- armazenamento também pode ser reduzido

Matrizes Esparsas

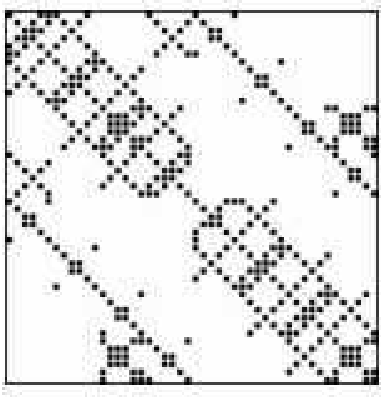
Frequentemente

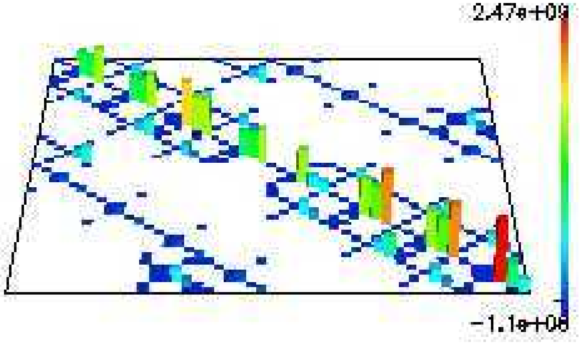
A é esparsa, n é grande
e
irregularmente estruturada!

Matrizes esparsas: matrizes que permitem utilizar técnicas especiais para tirar vantagem de sua estrutura (quando existe) e do grande número de zeros.
Tirar partido da esparsidade ...

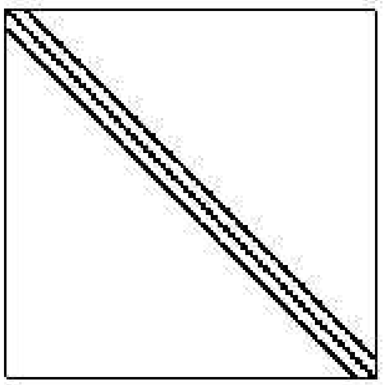
- computar economicamente sem armazenar os zeros.

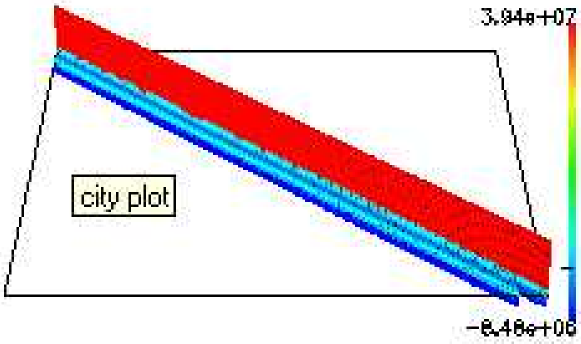
Matrizes Esparsas



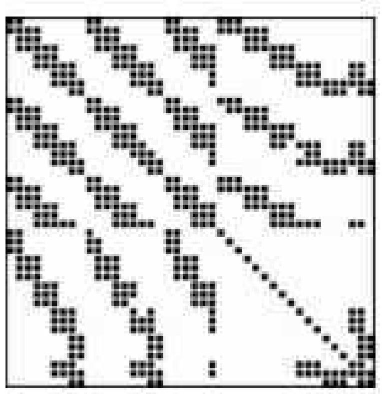


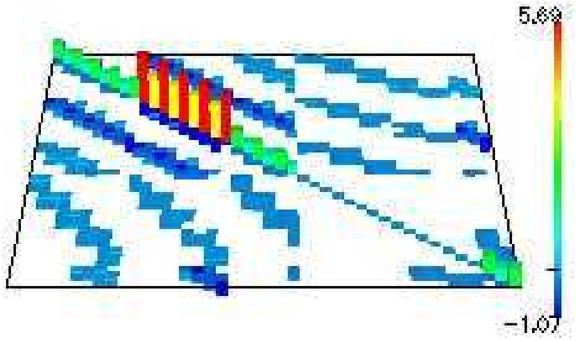
Matrizes Esparsas



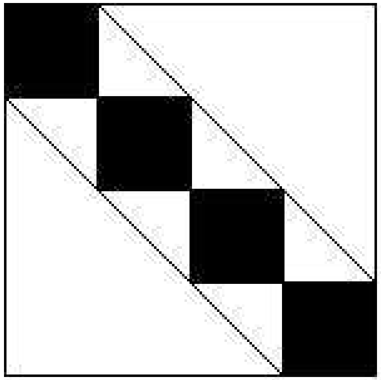


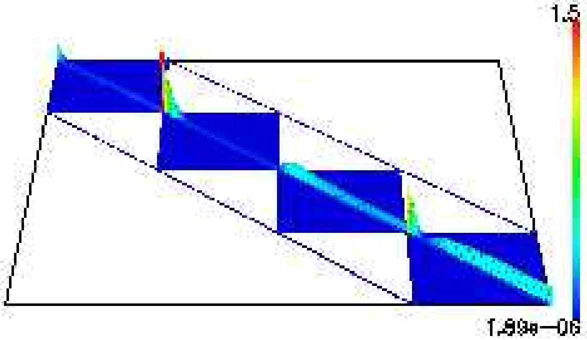
Matrizes Esparsas





Matrizes Esparsas





Métodos Diretos

Variações do Método de Eliminação de Gauss

- na ausência de erros de arredondamento fornecem a solução exata de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Métodos Iterativos

Computar uma seqüência de iterações que convergem para a solução desejada

Dada uma aproximação $\mathbf{x}^0$, o método iterativo gera uma seqüência

$$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$$

que converge para a solução desejada $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, onde $\mathbf{x}^{m+1}$ é calculado facilmente de $\mathbf{x}^m$

- não reproduzem a solução exata após um número finito de passos
- decrescem o erro em certa quantidade em cada passo (iteração)
- processo para quando o erro atinge uma tolerância pré-estabelecida
- erro final depende do número de iterações, das propriedades do método e das propriedades do sistema linear

Méts. Diretos $\times$ Méts. Iterativos

- Métodos Diretos
  - mais eficientes para matrizes de pequeno porte (n pequeno)
- Métodos Iterativos
  - mais eficientes para sistemas esparsos de grande porte (n grande)

Métodos Iterativos Básicos

- Jacobi
- Gauss-Seidel
- Sobre Relaxação Sucessiva - SOR
- SSOR
- Multigrid
- ...

$\triangleright\triangleright$ Gradiente Conjugado

$\triangleright\triangleright$ GRMES

Método de Jacobi

Considere o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$Ax = b$ com $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$,

Método de Jacobi

Com $a_{11} \neq 0; a_{22} \neq 0; a_{33} \neq 0$ e conhecida uma aproximação inicial x_1^0, x_2^0, x_3^0 arbitrária, obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^1 = \frac{-a_{12}}{a_{11}} x_2^0 + \frac{-a_{13}}{a_{11}} x_3^0 + \frac{b_1}{a_{11}} = m_{12}\; x_2^0 + m_{13}\; x_3^0 + c_1 \\ x_2^1 = \frac{-a_{21}}{a_{22}} x_1^0 + \frac{-a_{23}}{a_{22}} x_3^0 + \frac{b_2}{a_{22}} = m_{21}\; x_2^0 + m_{23}\; x_3^0 + c_2 \\ x_3^1 = \frac{-a_{31}}{a_{33}} x_1^0 + \frac{-a_{32}}{a_{33}} x_2^0 + \frac{b_3}{a_{33}} = m_{31}\; x_1^0 + m_{32}\; x_3^0 + c_3 \end{array} \right. .$$

- classe de métodos que podem ser escritos na forma

$$\mathbf{x}^{m+1} = M\mathbf{x}^m + \mathbf{c} \; .$$

Método de Jacobi

$\mathbf{x}^{m+1} = M\mathbf{x}^m + \mathbf{c}$, com

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{bmatrix},$$

- linear: $\mathbf{x}^{m+1} = \Phi\left(\mathbf{x}^m, \mathbf{x}^{m-1}, \ldots, \mathbf{x}^0, \mathbf{b}\right)$
- estacionário: M é constante
- primeira ordem (convergência)
- alto grau de paralelismo: x^m pode ser calculada independentemente uma da outra

Método de Gauss-Seidel

No Método de Jacobi:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^1 = m_{12}\, x_2^0 + m_{13}\, x_3^0 + c_1 \\ x_2^1 = m_{21}\, x_2^0 + m_{23}\, x_3^0 + c_2 \\ x_3^1 = m_{31}\, x_1^0 + m_{32}\, x_3^0 + c_3 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{lcl} x_1^1 & \xrightarrow{\text{obtido de}} & x_2^0 \text{ e } x_3^0 \\ x_2^1 & \rightarrow & x_1^0 \text{ e } x_3^0 \\ x_3^1 & \rightarrow & x_1^0 \text{ e } x_2^0 \end{array}$$

Motivação: já que já temos uma aproximação para x_1^1, melhor que x_1^0, porque não usá-la para determinar x_2^1 ?

Método de Gauss-Seidel

Numa iteração de Gauss-Seidel:

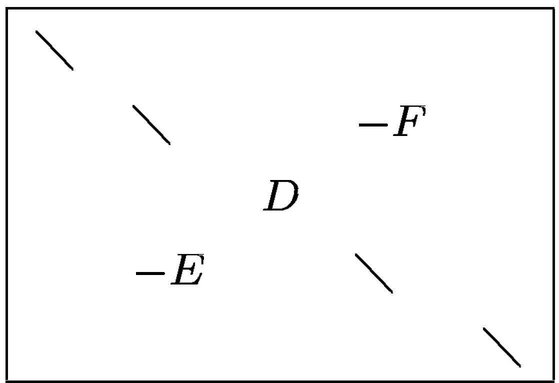
$$
\begin{array}{lcl}
x_1^1 & \xrightarrow{\text{obtido de}} & x_2^0 \text{ e } x_3^0 \\
\hookrightarrow & & \\
x_2^1 & \rightarrow & x_1^1 \text{ e } x_3^0 \\
\hookrightarrow & & \\
x_3^1 & \rightarrow & x_1^1 \text{ e } x_2^1
\end{array}
$$

- pode-se reescrever o método como

$$\mathbf{x}^{m+1} = M_{gs}\,\mathbf{x}^m + \mathbf{c}_{gs}$$

Esquemas de Relaxação

Baseados na decomposição



$$\Longrightarrow \qquad A = D - E - F$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Esquemas de Relaxação

Iteração de Jacobi: $D\mathbf{x}^{m+1} = (E + F)\,\mathbf{x}^m + \mathbf{b}$

Iteração de Gauss-Seidel $(D - E)\,\mathbf{x}^{m+1} = F\mathbf{x}^m + \mathbf{b}$

Nomenclatura geral:

$$\mathbf{x}^{m+1} = M\;\mathbf{x}^m + \mathbf{c}$$

onde

- Jacobi: $M_j = D^{-1}(E - F) = I - D^{-1}A$
- Gauss-Seidel: $M_{gs} = (D - E)^{-1}F = I - (D - E)^{-1}A$

Convergência

Teorema: Uma condição necessária e suficiente para o método iterativo estacionário $\mathbf{x}^{m+1} = M\ \mathbf{x}^m + \mathbf{c}$ convergir de uma aproximação inicial arbitrária x^0 é que $\rho(M) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i| < 1$, onde $\rho(M)$ é o raio espectral de M.